О СПЕКТРЕ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ, АНАЛИТИЧЕСКИ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА, В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Д. Ф. ХАРАЗОВ (Тбилиси, СССР)

1. Пусть X — отделимое линейное топологическое пространство над телом C комплексных чисел [1]; Λ — некоторая область плоскости комплексного переменного λ.

Рассмотрим семейство линейных (аддитивных, однородных и непрерывных) операторов $\{T_\lambda\}$, отображающих X в себя, заданных для всех $\lambda \in \Lambda$. Говорят, что оператор T_λ аналитически зависит от λ в области Λ, если для любых $\lambda_0 \in \Lambda$, $x \in X$, существует предел

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{(T_\lambda - T_{\lambda_0})x}{\lambda - \lambda_0} = T'_{\lambda_0} x, \tag{1}$$

где сходимость понимается в смысле топологии пространства X.

Оператор T_λ называется вполне непрерывным в X, если существует такая окрестность V_λ нуля пространства X [1]), что $T_\lambda(V_\lambda)$ — множество относительно компактное в X [2].

Рассмотрим уравнение

$$(I - T_\lambda)x = y, \quad x \in X, \quad y \in X, \tag{2}$$

где I — оператор тождественного преобразования в X, а T_λ — линейный оператор, аналитический в области Λ и вполне непрерывный в X при любом $\lambda \in \Lambda$.

В случае, когда X — пространство Банаха, уравнение (2) для полинома T_λ исследовали F. V. Atkinson [3], B. Sz.-Nagy [4], и P. H. Müller [5], а для аналитического в области Λ оператора T_λ, автор [6]. В общем случае отделимого линейного топологического пространства X, уравнение (2) рассмотрел M. Audin [7], допустивший в своих рассуждениях ряд погрешностей, которые обнаружил L. Schwartz (см. „Erratum" к работе [7]), указавший

[1]) В дальнейшем под словом окрестность мы всегда будем понимать окрестность нуля пространства X, если противное не оговаривается особо.

на возможность устранения этих погрешностей, но за счёт усиления налагаемых на T_λ требований.

В настоящей работе мы даём простой метод исследования спектра уравнения (2), для случая отделимого линейного топологического пространства X, являющийся непосредственным обобщением метода, использованного в работе [6] для пространства Банаха.

2. Мы будем считать в дальнейшем выполненным следующее условие (T): существует такая окрестность V_0, на которой предел (1) достигается равномерно (относительно $x \in V_0$) [2]).

Из существования предела (1) непосредственно следует, что для любых $\lambda_0 \in \Lambda$ и $x \in X$,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} (T_\lambda - T_{\lambda_0}) x = 0, \tag{3}$$

в смысле топологии пространства X.

Лемма 1. *Если условие* (T) *выполнено, то для любой последовательности точек* $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \in \Lambda$, *сходящейся к* λ_0, *существует такая окрестность* $V_0' \subset V_0$, *на которой*

$$\lim_{n \to \infty} (T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0}) x = 0$$

достигается равномерно (относительно $x \in V_0'$).

Действительно, нетрудно видеть, что в силу условия (T) и полной непрерывности операторов $(\lambda_n - \lambda_0)^{-1} (T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0})$ при любом n, существует такая окрестность $V_0' \subset V_0$, на которой последовательность $\left\{ \frac{(T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0}) x}{\lambda_n - \lambda_0} \right\}$ ограничена[3]) равномерно (относительно $x \in V_0'$). Следовательно, для любой окрестности W_0 найдётся такое число $\mu_0 > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$,

$$(T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0}) V_0' \subset (\lambda_n - \lambda_0) \mu_0 W_0 .$$

Так как, не ограничивая общности, мы можем считать w_0 уравновешенной окрестностью [1], то последнее включение показывает, что мы можем подобрать по W_0 такое число N, что для $n > N$ будет $|\lambda_n - \lambda_0| \mu_0 < 1$ и тогда, для $n > N$

$$(T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0}) V_0' \subset W_0 ,$$

что завершает доказательство леммы 1.

Из леммы 1 вытекает справедливость следующего предложения.

---

[2]) Отметим, что в случае пространства Банаха предел (1) достигается равномерно на любой сфере $\|x\| \leqq r$ пространства X [8].

[3]) Множество элементов пространства X называется ограниченным, если оно поглощается любой окрестностью нуля [1].

Лемма 2. Если условие (T) выполнено, то для любой последовательности точек $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \in \Lambda$, сходящейся к λ_0, существует такая окрестность $V_0'' \subset V_0'$, что множество $\{(T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0})V_0''\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ ограничено и последовательность $\{(T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0})x\}$ сходится к нулю равномерно относительно $x \in V_0''$.

Действительно, в силу леммы 1 и полной непрерывности операторов $(T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0})$ при любом n, легко убедиться в существовании такой окрестности $V_0'' \subset V_0'$, на которой последовательность $\{(T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0})x\}$ ограничена равномерно относительно $x \in V_0''$.

Линейный оператор, отображающий X на себя взаимно однозначно, будем называть обратимым.

Лемма 3. Если оператор $(I - T_{\lambda_0})$ обратим, то найдётся такая окрестность K_0 точки λ_0, что для любого $\lambda \in K_0$ оператор $(I - T_\lambda)$ обратим.

Допустим противное. Тогда, в силу альтернативы Фредгольма[4]), в любой окрестности точки λ_0 найдётся такое значение $\lambda = \lambda_n$, что уравнение $(I - T_{\lambda_n})x = 0$ имеет нетривиальное решение. Рассмотрим последовательность точек $\{\lambda_n\}$, сходящуюся к λ_0 и нетривиальные решения x_n уравнений

$$(I - T_{\lambda_n})x_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Существуют такие элементы $z_n = v_n x_n$ $(v_n > 0)$, что $z_n \in V_0''$ и $z_n \notin \frac{1}{4} V_0''$.

Действительно, так как любой элемент x_n поглощается любой окрестностью нуля пространства X [1], то найдутся такие числа $\varkappa > 0$, что $x_n \in \varkappa V_0''$. Пусть χ_n нижняя грань таких $\varkappa$; мы утверждаем, что $\chi_n > 0$. В самом деле, допустив противное, что $x_n \in \varepsilon V_0''$ для любого сколь угодно малого положительного числа ε, мы найдём, что $\frac{1}{\varepsilon} x_n \in V_0''$ при любом $\varepsilon > 0$. Последнее противоречит ограниченности множества $\{(T_{\lambda_n} - T_{\lambda_0}) V_0''\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (см. лемму 2). Полагая теперь $\frac{1}{\chi_n} > v_n > \frac{1}{4\chi_n}$ найдём z_n, удовлетворяющее указанным условиям. Кроме того, $(I - T_{\lambda_n})z_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. В силу леммы 2, последовательность $\{(I - T_{\lambda_n})x - (I - T_{\lambda_0})x\}$ сходится к нулю равномерно относительно $x \in V_0''$. Следовательно, для любой окрестности W_0 найдётся число $N > 0$ такое, что для всех $n > N$

$$(I - T_{\lambda_n})x - (I - T_{\lambda_0})x \in W_0, \quad x \in V_0''.$$

---

[4]) Справедливость альтернативы Фредгольма для отделимых линейных топологических пространств доказал J. Williamson [9].

Отсюда, полагая $x=z_n$ найдём, что $\lim\limits_{n\to\infty}(I-T_{\lambda_0})z_n=0$ и $y_n=(I-T_{\lambda_0})z_n\to 0$. В силу непрерывности обратного оператора $(I-T_{\lambda_0})^{-1}$ [9], имеем $z_n=(I-T_{\lambda_0})^{-1}y_n\to 0$, что противоречит условию $z_n\bar{\in}\frac{1}{4}V_0''$ и доказывает лемму 3.

Лемма 4. Найдётся такая окрестность $K_0'\subset K_0$ точки λ_0, внутри которой оператор $(I-T_\lambda)^{-1}$ аналитически зависит от λ и

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{[(I-T_\lambda)^{-1}-(I-T_{\lambda_0})^{-1}]\,x}{\lambda-\lambda_0}=(I-T_{\lambda_0})^{-1}T'_{\lambda_0}(I-T_{\lambda_0})^{-1}x,$$

для любого $x\in X$.

Пусть W_0—произвольная окрестность, тогда для $\lambda\in K_0$ множество $(I-T_\lambda)w_0$ также будет некоторой окрестностью, как прообраз открытого множества W_0 при непрерывном преобразовании $(I-T_\lambda)^{-1}$. Тогда существуют [1] уравновешенные окрестности V_0 и W_0' такие, что $V_0+V_0\subset W_0'\subset\subset(I-T_\lambda)W_0$. В силу (1) и (3) для V_0 и $x\in X$ можно подобрать число $\varrho>0$ так, что для всех λ, удовлетворяющих неравенству $|\lambda-\lambda_0|<\varrho$, будем иметь

$$\{(\lambda-\lambda_0)^{-1}[(I-T_{\lambda_0})-(I-T_\lambda)]-T'_{\lambda_0}\}(I-T_{\lambda_0})^{-1}x\in V_0,$$
$$[(I-T_{\lambda_0})-(I-T_\lambda)](I-T_{\lambda_0})^{-1}\,T'_{\lambda_0}(I-T_{\lambda_0})^{-1}x\in V_0.$$

Отсюда

$$(\lambda-\lambda_0)^{-1}[(I-T_{\lambda_0})-(I-T_\lambda)](I-T_{\lambda_0})^{-1}x-(I-T_\lambda)(I-T_{\lambda_0})^{-1}\,T'_{\lambda_0}(I-T_{\lambda_0})^{-1}x\in$$
$$\in V_0+V_0\subset(I-T_\lambda)\,W_0.$$

Следовательно, для любой окрестности W_0 и любого $x\in X$ можно подобрать $\varrho>0$ так, что для всех $\lambda\in K_0$, $|\lambda-\lambda_0|<\varrho$,

$$(\lambda-\lambda_0)^{-1}[(I-T_\lambda)^{-1}-(I-T_{\lambda_0})^{-1}]x-(I-T_{\lambda_0})^{-1}\,T'_{\lambda_0}(I-T_{\lambda_0})^{-1}x\in W_0,$$

что и доказывает лемму 4.

3. Теорема 1. Если T_λ при каждом $\lambda\in\Lambda$ линейный вполне непрерывный оператор, отображающий X в себя, аналитически зависящий от λ в области Λ и удовлетворяющий условию (T), то уравнение

$$(2_0)\qquad (I-T_\lambda)x=0$$

имеет одинаковое число $\alpha\geqq 0$ линейно-независимых решений при любом $\lambda\in\Lambda$, за исключением, быть может, некоторого множества точек $Q\subset\Lambda$, не имеющего предельной точки внутри Λ, на котором уравнение (2_0) имеет больше чем α линейно-независимых решений. Если $\alpha=0$, то оператор $(I-T_\lambda)$ обратим для всех $\lambda\in\Lambda-Q$.

Пусть $\lambda_0\in\Lambda$. Уравнение (2) перепишем в виде

(4) $$[I-T_{\lambda_0}-(T_\lambda-T_{\lambda_0})]x=y.$$

На основании теории F. RIESZ'а линейных уравнений с вполне непрерывными операторами, обобщённой на случай отделимых линейных топологических пространств J. WILLIAMSON-ом [9], оператор T_{λ_0} допускает представление

(5) $$T_{\lambda_0}x=Ux+\sum_{k=1}^{n}f_k(x)x_k,$$

где $(I-U)$ — гомеоморфизм X на себя, x_k $(k=1,\dots,n)$ — некоторая система линейно-независимых элементов пространства X, а f_k $(k=1,\dots,n)$ — линейные непрерывные функционалы на X. При помощи (5), уравнение (4) запишем в виде

(6) $$B_\lambda x=[I-U-(T_\lambda-T_{\lambda_0})]x=y+\sum_{k=1}^{n}f_k(x)x_k.$$

Полагая $A_\lambda x=T_\lambda x-\sum_{k=1}^{n}f_k(x)x_k$ получим, что

$$B_\lambda x=(I-A_\lambda)x.$$

Но оператор A_λ, как сумма вполне непрерывного и конечномерного операторов, также вполне непрерывен в X при любом $\lambda\in\Lambda$. Кроме того, в силу условий, наложенных на T_λ, оператор A_λ аналитический в Λ и удовлетворяет условию (T). Но, $A_{\lambda_0}=U$ и следовательно оператор $(I-A_{\lambda_0})$ обратим. В силу леммы 3, существует окрестность K_0 точки λ_0 такая, что для всякого $\lambda\in K_0$, оператор $B_\lambda=(I-A_\lambda)$ обратим и, в силу леммы 4, оператор B_λ^{-1} аналитический внутри окрестности $K_0'\subset K_0$ точки λ_0.

Рассматривая теперь уравнение (2) или, что всё равно, уравнение (6), для $\lambda\in K_0'$ и действуя на обе части (6) оператором B_λ^{-1} получим

$$x=B_\lambda^{-1}y+\sum_{k=1}^{n}f_k(x)B_\lambda^{-1}x_k.$$

Полагая $a_k=f_k(x)$ $(k=1,\dots,n)$ и пользуясь линейной независимостью элементов $B_\lambda^{-1}x_k$, легко убедимся в том, что если x — решение уравнения (2), то числа a_k $(k=1,\dots,n)$ будут решением следующей системы уравнений:

(7) $$a_k-\sum_{i=1}^{n}f_k(B_\lambda^{-1}x_i)a_i=f_k(B_\lambda^{-1}y) \qquad (k=1,\dots,n)$$

и наоборот, если a_k $(k=1, \ldots, n)$ — решение системы (7), то

$$x = B_\lambda^{-1} y + \sum_{k=1}^{n} a_k B_\lambda^{-1} x_k$$

будет решением уравнения (2) (для любого $\lambda \in K_0'$).

Рассмотрим определитель системы (7)

$$D_0(\lambda) = |\delta_{ik} - f_k(B_\lambda^{-1} x_i)|_{i,k=1,\ldots,n}.$$

$D_0(\lambda)$ — функция голоморфная в K_0', ибо, как легко видеть, все функции $f_k(B_\lambda^{-1} x_i)$ голоморфны в окрестности K_0', в которой B_λ^{-1} — аналитический оператор.

Пусть $\alpha \geqq 0$ — наименьшее число линейно-независимых решений, которым обладает уравнение (2_0) при λ, пробегающем область Λ. Пусть в некоторой точке $\lambda_1 \in \Lambda$, уравнение (2_0) имеет $m > \alpha$ линейно независимых решений. Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что существует такое $\varrho > 0$, что для всех $\lambda \neq \lambda_1$, $|\lambda - \lambda_1| < \varrho$, число линейно-независимых решений уравнения (2_0) равно α. Рассмотрим точку $\lambda_0 \in \Lambda$, для которой уравнение (2_0) имеет α линейно-независимых решений. Соединим точки λ_1 и λ_0 кривой $\gamma \subset \Lambda$ и построим для рассматриваемой точки λ_0 её окрестность K_0', в которой уравнение (2) эквивалентно, в указанном выше смысле, системе (7). Так как уравнение (2_0) при $\lambda = \lambda_0$ имеет α линейно незасимых решений, то найдётся некоторый минор порядка $n - \alpha$ определителя $D_0(\lambda)$, отличный от нуля в точке $\lambda = \lambda_0$ (поэтому n в представлении (5) для рассматриваемой точки λ_0 необходимо больше α). Обозначим этот минор через $D_{n-\alpha}(\lambda)$. Из аналитичности $D_{n-\alpha}(\lambda)$ в K_0' и того, что $D_{n-\alpha}(\lambda_0) \neq 0$ следует, что $D_{n-\alpha}(\lambda)$ отличен от нуля всюду в K_0' за исключением, быть может, некоторого множества точек, не имеющего предельной точки внутри K_0'. Покрывая все точки кривой γ окрестностями, внутри которых уравнение (2) будет эквивалентно соответствующей системе (7) и выбирая из этого покрытия конечное покрытие видим, что во всех точках окрестности K_1', соответствующей точке λ_1, за исключением, быть может, некоторого изолированного множества точек, уравнение (2_0) имеет α линейно-независимых решений, что и завершает доказательство теоремы 1.

Из проведённых при доказательстве теоремы 1 рассуждений следует справедливость следующего предложения.

Теорема 2. *Если оператор $(I - T_\lambda)$ обратим хотя бы в одной точке $\lambda \in \Lambda$, то решение уравнения (2) — мероморфная функция параметра λ в области Λ.*

4. Рассмотрим теперь случай, когда T_λ — полином относительно λ вида

$$T_\lambda = \sum_{k=0}^{m} \lambda^k T_k, \tag{8}$$

где T_k $(k=0, 1, \ldots, m)$ — линейные вполне непрерывные операторы, отображающие X в себя. Нетрудно видеть, что если оператор T_k переводит окрестность $V_0^{(k)}$ в относительно компактное в X множество $T_k(V_0^{(k)})$ $(k=0, 1, \ldots, m)$, то при любом λ, оператор T_λ переводит окрестность $V_0=\bigcap_{k=0}^{m} V_0^{(k)}$ в относительно компактное множество $T_\lambda(V_0)$. Кроме того, нетрудно видеть, что для любого λ_0 и $x\in X$,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{(T_\lambda - T_{\lambda_0})x}{\lambda-\lambda_0} = T_1 x + 2\lambda_0 T_2 x + \cdots + m\lambda_0^{m-1} T_m x,$$

причём этот предел достигается равномерно на окрестности $V_0=\bigcap_{k=0}^{m} V_0^{(k)}$. Следовательно, полином T_λ удовлетворяет всем нашим требованиям и имеет место

Теорема 3. Если T_λ — полином вида (8), то уравнение $\left(I-\sum_{k=0}^{m}\lambda^k T_k\right)x=0$ имеет одинаковое число $\alpha\geqq 0$ линейно-независимых решений при любом λ на плоскости комплексной переменной, за исключением, быть может, некоторого множества точек Q, которое может сгущаться лишь в бесконечности, на котором это уравнение имеет больше чем α линейно-независимых решений. Если $(I-T_0)$ — гомеоморфизм X на себя, то $\alpha=0$.

5. Пусть теперь $M\subset\Lambda$ — некоторое множество точек, не имеющее предельной точки внутри Λ. Следуя рассуждениям, проведённым в работе [6], можно доказать, что справедлива

Теорема 4. Если оператор T_λ в области $\Lambda-M$ удовлетворяет условиям теоремы 1, а в окрестности любой точки $\mu\in M$ имеет вид

$$T_\lambda x = \frac{1}{(\lambda-\mu)^n}\sum_{i=1}^{\sigma_n} f_i^{(n)}(x)\,\omega_i^{(n)} + \cdots + \frac{1}{\lambda-\mu}\sum_{i=1}^{\sigma_1} f_i^{(1)}(x)\,\omega_i^{(1)} + H_\lambda x,$$

где H_λ — линейный аналитический оператор в рассматриваемой окрестности точки $\lambda=\mu$, удовлетворяющий условию вида (T) для точки $\lambda_0=\mu$ и вполне непрерывный в X при $\lambda=\mu$, $f_i^{(k)}$ $(k=1,\ldots,n;\ i=1,\ldots,\sigma_k)$ — линейные непрерывные функционалы на X, $\omega_i^{(k)}(i=1,\ldots,\sigma_k)$ — система линейно-независимых элементов пространства X $(k=1,\ldots,n)$, то уравнение $(I-T_\lambda)x=0$ имеет одинаковое число $\alpha\geqq 0$ линейно-независимых решений при любом $\lambda\in\Lambda-M$, за исключением, быть может, некоторого множества точек $Q \subset \Lambda - M$, не имеющего предельной точки внутри Λ, на котором это уравнение имеет больше чем α линейно-независимых решений.

На основании теоремы 1, применённой к области $\Lambda - M$, видим, что множество Q не может сгущаться внутри $\Lambda - M$. Следуя рассуждениям, изложенным в работе [6], убеждаемся в том, что и точки $\mu \in M$ не могут быть предельными для множества Q.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства (Москва, 1959).
[2] Н. Бурбаки, Общая топология. Основные структуры (Москва, 1958).
[3] F. V. Atkinson, A spectral problem for completely continuous operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, **3** (1952), 53–60.
[4] B. Sz.-Nagy, On a spectral problem of Atkinson, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, **3** (1952), 61–66.
[5] P. H. Müller, Zu einer Spektralbetrachtung von Atkinson und Sz.-Nagy, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956), 195–197.
[6] Д. Ф. Харазов, К теории линейных уравнений в пространствах Банаха, Труды Тбил. мат. института, **19** (1953), 163–171.
[7] M. Audin, Sur les équations linéaires dans un espace vectoriel, *Thèses présentées à l'Université de Paris*, sér. A, No. 3081, **1957**, 5–71.
[8] Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы (Москва, 1951).
[9] J. H. Williamson, Compact linear operators in linear topological spaces, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 149–156.

(Поступило 4/I/1961 г.)